

Открытая олимпиада. Отборочный этап 2015-16. 7 класс. Решения.

Задача 1.

Космонавт после катапультирования движется вдоль двух направлений x и y ("вправо" и "наверх"). Скорость движения вдоль y совпадает со скоростью движения капсулы V , а скорость движения вбок равна U . Для попадания на корабль космонавт должен оказаться на оси движения корабля, в одной и той же с кораблем точке. Время движения космонавта до оси движения корабля от момента поломки равно $T = 2L/V$, так как с момента поломки космонавт движется с постоянной скоростью V вдоль оси y . Корабль за это время пройдет путь равный $VT = 2L$, т.е. окажется на расстоянии L правее от точки пересечения траекторий корабля и капсулы. Именно в этой точке должен оказаться космонавт через время T после поломки.

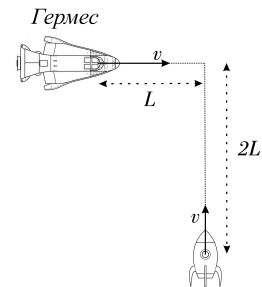


Рис. 1:

Таким образом космонавту требуется переместиться вдоль оси x на расстояние L со скоростью U : нетрудно заметить, что на это уйдет время $T_1 = L/U$. Другими словами: космонавту надо катапультироваться за время T_1 до момента когда капсула пересечет траекторию корабля (время T с момента поломки). Таким образом, космонавту надо катапультироваться через время $t = T - T_1$ после поломки.

Ответ: $t = 2L/V - L/U = 240$ сек (1-ый вариант), $= 100$ сек (2-ой вариант).

Оценка

- Правильное представление о двух компонентах скорости космонавта после катапультирования - 3 балла
- Расчет времени полета капсулы до пересечения с траекторией корабля - 1 балл
- Расчет точки, где произойдет встреча - 2 балла
- Расчет времени полета от момента катапультирования до встречи с кораблем - 2 балла
- Ответ - 2 балла

Задача 2.

Рассмотрим объем V , который находится под поверхностью воды - он складывается из двух составляющих: объема воды и объема подводной лодки V_S . Объем воды в процессе управления лодкой не меняется, значит изменение объема V равно изменению объема лодки:

$$\Delta V = \Delta V_S. \quad (1)$$

Рассмотрим увеличение объема V за время δt - оно связано с поднятием уровня воды на δh . С геометрической точки зрения увеличение V происходит за счет присоединения к нему цилиндрического объема ΔV . Учитывая связь между объемом цилиндра, площадью его основания и высотой можно записать:

$$\Delta V = S\delta h = Sv\delta t, \quad (2)$$

где v есть скорость поднятия уровня воды в ведре. Проводя аналогичные рассуждения с подводной лодкой легко заметить, что:

$$\Delta V_S = S_1 u \delta t. \quad (3)$$

С учетом выражения (1) теперь легко получить, что

$$S_1 u = S v, \quad (4)$$

откуда легко следует ответ.

Ответ: $v = uS_1/S = 2$ мм/мин (1-ый вариант), $= 0.08$ мм/сек (2-ой вариант).

Оценка

- Понимание за счет чего поднимается уровень воды в ведре (например формула (1)) - 3 балла
- Выражение для уровня воды в ведре, аналогичное (2) - 3 балла
- Выражение для изменения объема подводной лодки, аналогичное - (3) - 2 балла
- Ответ - 2 балла

Задача 3.

Пусть за определенное время t пираты прошли путь x_1 , x_2 и x_3 . Полное перемещение сундука y складывается из суммы перемещений, связанных с перемещением каждого из пиратов $y = y_1 + y_2 + y_3$.

Для простоты вычисления y_1 можно считать, что 1-ый пират переместился, а остальные пираты стоят на своих местах. Тогда легко заметить, что блоки В и С неподвижны, так же как и веревка на отрезке между блоками А и В. Предположим, что в этом случае блок А сместился на величину z . Тогда можно сказать, что "освободилась" длина веревки, равная $2z$. На эту длину в итоге и переместится первый пират. То есть $x_1 = 2z$. В итоге мы получили важный результат: *Если с одной стороны блока веревка покоится, а с другой вытягивается на L , то перемещение блока равно $L/2$.* Применяя это правило к перемещению блока D, и учитывая, что блок С и веревка на участке между блоками С и D неподвижна можно записать:

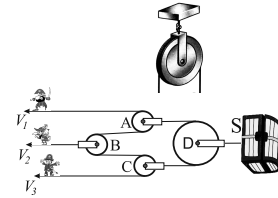


Рис. 2:

$$y_1 = z/2; z = x_1/2; y_1 = x_1/4. \quad (5)$$

Случай 3-го пирата полностью аналогичен 1-му пирату и мы можем сразу записать:

$$y_3 = x_3/4. \quad (6)$$

В случае перемещения второго пирата, отметим, что в соответствии с полученным Правилom блоки А и С сдвинуться на величину $x_2/2$ и, значит, на такую же величину сдвинется блок D.

$$y_2 = x_2/2. \quad (7)$$

Складывая полученные результаты можно получить:

$$y = x_1/4 + x_2/2 + x_3/4, \quad (8)$$

и, если поделить обе части полученного выражения на время, то можно получить ответ.

Ответ Скорость сундука $U = V_1/4 + V_2/2 + V_3/4 = 2.75$ км/ч (1-ый вариант), 3.75 км/ч (2-ой вариант)

Оценка

- Полученное выше Правило, сформулированное любым способом - 3 балла. Возможно использование других соображений, которые позволят получить формулы, аналогичные (5)-(7). Это также оценивается в 3 балла.
- Каждое из выражений (5)-(7) - 1.5 балла.
- Выражение (8) или его любые аналоги - 1.5 балла. Отметим, что есть возможность получить это выражение, не вычисляя по отдельности y_i . Если вывод обоснован и выражение получено правильно, оно оценивается сразу в 9 баллов.
- Ответ - 1 балл.

Задача 4.

Через небольшое время после выхода с остановки В Лена может с легкостью на нее успеть, если увидит автобус. В процессе движения Лена доходит до некоторой точки D1, начиная с которой она может добежать до остановки А, если увидит автобус. Также можно выбрать точку D2, после прохода которой, Лена уже не успеет добежать до остановки В. По условию задачи отрезки В-D2 и D1-А пересекаются, т.к. есть область откуда Лена может добежать до любой из двух остановок, если увидит автобус. В частности, это означает, что точка D2 лежит правее D1. Чем больше скорость, с которой Лена может бегать, тем больше расстояние между D1 и D2. По мере уменьшения скорости Лены, точки D1 и D2 сближаются, и при некоторой скорости U совпадают. Скорость U является минимально возможной скоростью Лены, бегая с которой она гарантировано попадет на автобус. Действительно, если скорость Лены меньше U , то точка D2 будет левее D1 и между ними будет отрезок, из которого Лена не успеет ни на одну из остановок.

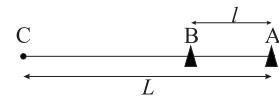


Рис. 3:

Итак, рассмотрим точку $D = D1 = D2$. Понятно, что если бежать (со скоростью U) из нее на остановку В или А, то на любой из этих остановок Лена окажется одновременно с автобусом. Введем величину X , как расстояние ВD. Тогда из условий, что время движения Лены по отрезку DB равно времени движения автобуса по отрезку CB, и то что время движения Лены по отрезку DA равно времени движения автобуса по отрезку CA можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{X}{U} &= \frac{L-l}{v_A} \\ \frac{l-X}{U} &= \frac{L}{v_A}. \end{aligned} \quad (9)$$

Приведенная система уравнений решает задачу. Можно сложить левые и правые части уравнений и получить, что

$$\frac{l}{U} = \frac{2L-l}{v_A}, \quad (10)$$

откуда следует ответ.

Ответ Минимальная скорость Лены $U = lv_A/(2L-l) = 12$ км/ч (1-ый вариант), 15 км/ч (2-ой вариант)

Оценка Если не указано, что найдена именно минимальная скорость - оценка не снижается.

- Получена формула для времени, за которая Лена добегает до одной из остановок (любой) из некоторой точки на отрезке АВ - 2 балла.
- Получено время для движения автобуса до одной из остановок А, В - 1 балл.

- Есть идея, что этим времена надо сравнивать - 2 балла
- Получена система, аналогичная (9) - 3 балла. Также, это может любая другая система уравнений, вывод которых приведен и решение которой непосредственно приводит к ответу.
- Ответ - 2 балла.

Задача 5.

После таяния рост снеговика уменьшился от начального L до αL , $\alpha = 4/5$ или $2/3$ в 1-ом и 2-ом вариантах соответственно. Так как форма снеговика не изменилась, то таким же образом уменьшились его ширина и толщина. Мы знаем, что объем тела определяется произведением его высоты, ширины и толщины. Тогда понятно, что если старый объем был V , то после таяния он стал равным $\alpha^3 V$. Так как плотность снеговика не изменилась, то масса уменьшилась так же как и объем и стала равной $\alpha^3 m$.

Вариант 1

Масса вытекшей из снеговика воды равна

$$m_W = (1 - \alpha^3)m, \quad (11)$$

откуда можно получить ответ

Ответ Объем вытекшей воды равен $V = (1 - \alpha^3)m/\rho = 24.4$ литра.

Вариант 2

Объем растаявшего снега равен

$$V_S = (1 - \alpha^3)V, \quad (12)$$

откуда можно получить ответ

Ответ Масса вытекшей воды $m = (1 - \alpha^3)V\rho_0 = 38$ кг

Оценка

- Сформулировано, что объем или масса умножатся на α^3 - 5 баллов.
- Записана формула для объема (1 вариант) или массы (2 вариант) вытекшей воды - 3 балла.
- Численный ответ - 2 балла.